PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2006

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4. Se valorarán positivamente la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

OPCIÓN A

1º) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Calcula la matriz X que verifica: AX + B = I, donde I representa la matriz identidad.

$$A\cdot X+B=I\ ;;\ A\cdot X=I-B\ ;;\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(I-B)\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(I-B)}\qquad (*)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+2=\underline{3}\ ;;\ A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\ ;;$$

$$Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

$$I-B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=I-B}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (*) y operando:

$$X = A^{-1} \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+0+1 & 0+0+1 & -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-0 \\ -\frac{2}{3}+0-0 & -0+0-0 & \frac{2}{3}-\frac{1}{3}+0 \\ 0+0-1 & 0+0-1 & -0-0+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = X}}$$

****

2º) Estudia, según los valores del parámetro k, la posición relativa de las siguientes rectas: $r \equiv x-k=\frac{y+1}{2k-1}=\frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=z+2$.

Vamos a estudiar la posición relativa mediante vectores.

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2k-1,\ 2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(k+1,\ -1,\ 1)$.

Para que las rectas sean paralelas o coincidentes los vectores directores tienen que ser linealmente independientes; en caso contrario las rectas se cortan o se cruzan.

$$\frac{1}{k-1}=\frac{2k-1}{-1}=\frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{k-1}=\frac{2}{1} \Rightarrow 1=2k-2 \;;;\; 3=2k \;;;\; \underline{k=\frac{3}{2}} \\ \\ \frac{2k-1}{-1}=\frac{2}{1} \Rightarrow 2k-1=-2 \;;;\; 2k=-1 \;;;\; \underline{k=-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

<u>Las rectas r y s se cruzan o se cortan, independientemente del valor de k.</u>

Para diferenciar el caso se determina un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de la recta r y como extremo un punto de la recta s, por ejemplo los puntos $A(k,\ -1,\ 0)$ y $B(0,\ 2,\ -2)$.

$$\overrightarrow{w}=B-A=(0,\ 2,\ -2)-(k,\ -1,\ 0)=(-k,\ 3,\ -2).$$

Si los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes o coplanarios (es cero el valor del determinante que forman, es decir: que su rango es menor que tres), las rectas se cortan; en caso contrario se cruzan.

$$Rango\ \left(\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\ \ y\ \ \overrightarrow{w}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2k-1 & 2 \\ k+1 & -1 & 1 \\ -k & 3 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2+6(k+1)-k(2k-1)-2k-3+2(k+1)(2k-1)=0 \;;;$$

$$-1+6k+6-2k^2+k-2k+2(2k^2-k+2k-1)=0 \;;;\; -2k^2+5k+5+4k^2+2k-2=0 \;;;$$

$$2k^2+7k+3=0 \;;;\; k=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-7\pm 5}{4} \Rightarrow \underline{k_1=-3} \;;;\; \underline{k_2=-\frac{1}{2}}$$

$$Para \quad \left\{\begin{matrix} k=-3 \\ k=-\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \quad las \quad rectas \quad se \quad cor\tan \quad y \quad para \quad \left\{\begin{matrix} k\neq -3 \\ k\neq -\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \quad las \quad rectas \quad se \quad cruzan.$$

****

3º) Demuestra razonadamente que la ecuación $x^2 = x \cdot sen\ x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones dentro del intervalo $[-\pi,\ \pi]$.

Considerando la función $f(x) = x^2 - x\,sen\ x - \cos x$, que es continua derivable en su dominio, (que es R, por ser una función compuesta por sumas y productos de funciones continuas y derivables en R) por lo cual le son aplicables los teoremas de Bolzano y Rolle a cualquier intervalo cerrado considerado.

La función $f(x) = x^2 - x\,sen\ x - \cos x$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $f(x) = f(-x)$: $f(-x) = (-x)^2 - (-x)sen\ (-x) - \cos(-x) = x^2 - x\ sen\ x - \cos x = f(x)$ lo cual significa que demostrar lo pedio equivale a demostrar que la función $f(x) = x^2 - x\,sen\ x - \cos x$ tiene una única solución en el intervalo $[0,\ \pi]$.

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

Aplicando el teorema de Bolzano al intervalo $[0,\ \pi]$ se observa que la f(x) tiene al menos una solución en éste intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^2 - 0 \cdot sen\ 0 - \cos 0 = 0 - 0 - 1 < 0 \\ f(\pi) = \pi^2 - \pi\,sen\ \pi - \cos \pi = \pi^2 - 0 + 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists c \in [0,\ \pi] \Rightarrow f(c) = 0}$$

Vamos a demostrar que la solución es única:

Si la función f(x) tuviera al menos otra raíz real x = b, indicaría que f(b) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función f(x) el teorema de Rolle, que dice que "si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(c) = 0.

$$f'(x) = 2x - (1 \cdot sen\ x + x \cdot \cos x) + sen\ x = 2x - sen\ x - x \cdot \cos x + sen\ x = x(2 - \cos x)$$

$f'(c) = 0 \Rightarrow c(2 - \cos c) = 0 \Rightarrow c = 0,\ pero\ 0 \notin (0,\ \pi)$, lo cual contradice el Teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que la función f(x) tiene una sola raíz en el intervalo considerado $[0,\ \pi]$ y, como consecuencia de lo expuesto:

$$\underline{\underline{La\ ecuación\ x^2 = x \cdot sen\ x + \cos x\ tiene\ exactamente\ dos\ soluciones\ en\ [-\pi,\ \pi],\ c.q.d.}}$$

****

4º) Una función polinómica de tercer grado, ¿cuántos extremos relativos puede tener como máximo? ¿Qué podemos decir de los puntos de inflexión? Razona las respuestas y pon ejemplos aclaratorios.

Lo máximo que puede tener son dos extremos relativos.

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. La derivada de una función polinómica de tercer grado es una función de segundo grado que, como máximo, puede tener dos soluciones.

Dependiendo del tipo de funciones pueden ocurrir los dos siguientes casos:

1. - Que la derivada tenga soluciones reales, en cuyo caso la función tiene un máximo y un mínimo relativos, teniendo en cuenta que las funciones polinómicas son continuas.

2. - Que la derivada no tenga soluciones reales, en cuyo caso la función es monótona y, por lo tanto, carece de extremos relativos.

La función tiene necesariamente un solo punto de inflexión.

Para que una función tenga un punto de inflexión es necesario que se anule la segunda derivada y como la segunda derivada de una función polinómica de tercer grado es una función de primer grado, siempre tiene una solución.

Ejemplos de los casos indicados son los siguientes:

$$f(x)=2x^3-15x^2+36x+1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=6x^2-30x+36=6(x^2-5x+6)=6(x-2)(x-3) \rightarrow \begin{Bmatrix} \underline{x_1=2} \\ \underline{x_2=3} \end{Bmatrix} \\ f''(x)=12x-30=6(2x-5) \rightarrow \underline{x=\frac{5}{2}} \end{cases}$$

que tiene extremos relativos para los valores x = 2 y para x = 3 y p. i. para $x=\frac{5}{2}$.

$$f(x)=x^3+1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=3x^2 \rightarrow \begin{Bmatrix} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=0} \end{Bmatrix} \Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x \in R \Rightarrow \underline{\textit{Monótona creciente}} \\ f''(x)=6x \rightarrow \underline{x=0} \end{cases}$$

La función tiene un punto de inflexión para x = 0.

****

OPCIÓN B

1º) Calcula el valor de m de manera que el sistema homogéneo $\left.\begin{array}{r} 2x-my+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ mx-y+13z=0 \end{array}\right\}$ tenga soluciones diferentes de la trivial y resuélvelo en estos casos.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ m & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ m & -1 & 13 \end{vmatrix} = 26-4-7m^2-4m+14+13m=0 \ ;; \ 7m^2-9m-36=0 \ ;;$$

$$m=\frac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 7\cdot 36}}{2\cdot 7}=\frac{9\pm\sqrt{81+1008}}{14}=\frac{9\pm\sqrt{1089}}{14}=\frac{9\pm 33}{14}\Rightarrow\begin{cases} m_1=\frac{42}{14}=\underline{3=m_1} \\ m_2=-\frac{24}{14}=\underline{-\frac{12}{7}=m_2} \end{cases}$$

$$Para \ \left\{\begin{array}{c} m\neq 3 \\ m\neq -\frac{12}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{Rango \ \ M=3=n^{o} \ \ incógnitas \ \Rightarrow \ Compatible \ \ determinado}} \\ \underline{\underline{Solución \ \ única: \ x=y=z=0}} \end{cases}$$

Para $m=3$ resulta el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ 3x-y+13z=0 \end{array}\right\}$.

Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

$$\begin{cases} x+y+7z=0 \\ 3x-y+13z=0 \end{cases} \Rightarrow \ \underline{z=\lambda} \ \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-7\lambda \\ 3x-y=-13\lambda \end{array}\right\} \ 4x=-20\lambda \ \Rightarrow \ \underline{x=-5\lambda}$$

$$x+y=-7\lambda \ ;; \ y=-x-7\lambda=5\lambda-7\lambda=-2\lambda \ ;; \ \underline{y=-2\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-5\lambda \\ y=-2\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

Para $m=-\frac{12}{7}$ resulta el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+\frac{12}{7}y+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ -\frac{12}{7}x-y+13z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 14x+12y+28z=0 \\ x+y+7z=0 \\ 12x+7y-91z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+6y+14z=0 \\ x+y+7z=0 \\ 12x+7y-91z=0 \end{array}\right\}$$

Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

$$\begin{cases} 7x+6y+14z=0 \\ x+y+7z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+6y=-14\lambda \\ x+y=-7\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 7x+6y=-14\lambda \\ -6x-6y=42\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=28\lambda}$$

$$x+y=-7\lambda \;;;\; y=-x-7\lambda=-28\lambda-7\lambda=-35\lambda \;;;\; \underline{y=-35\lambda}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=28\lambda \\ y=-35\lambda \qquad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2º) Busca la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta dada en forma vectorial $r \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ -1) + k(-1,\ 1,\ 2)$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos A(0, 1, 2) y B(1, -1, 1). Calcula la distancia al origen de coordenadas del plano π.

El vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (-1,\ 1,\ 2)$.

El vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -2,\ -1)$.

Como el plano pedido contiene a la recta r, contiene a todos sus puntos, por lo cual podemos tomar el punto P(1, 2, -1) perteneciente a r para obtener la ecuación general o implícita del plano π, que es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -(x-1) + 2(z+1) + 2(y-2) - (z+1) + 4(x-1) - (y-2) = 0\ ;;$$

$$3(x-1) + (y-2) + (z+1) = 0\ ;;\ 3x - 3 + y - 2 + z + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi \equiv 3x + y + z - 4 = 0}}$$

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto $O(0,\ 0,\ 0)$ sería: $d(O,\ \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Considerando el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 4 = 0$, su distancia al origen es la siguiente:

$$d(O,\ \pi) = \frac{|-4|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{11}} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{11}}{11}\ u = d(O,\ \pi)}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=e^x(x-k)$, demuestra que para cualquier valor del parámetro k, la función presenta un único extremo relativo. Representa gráficamente la función sabiendo que f(0) = 1.

Para que una función tenga un posible extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x)=e^x(x-k)+e^x\cdot 1=e^x(x-k+1)=0 \Rightarrow \underline{x=k-1}$$

La condición anterior no es suficiente ya que es necesario que no se anule la segunda derivada para los valores reales de x que anulan la primera:

$$f''(x)=e^x(x-k+1)+e^x\cdot 1=\underline{e^x(x-k+2)=f''(x)}$$

$$f''(k-1)=e^{k-1}(k-1-k+2)=e^{1-k}\neq 0,\ \forall k\in R \Rightarrow \underline{\underline{Extremo\ \ relativo\ \ para\ \ x=k-1,\ \ c.q.d.}}.$$

Sabiendo que f(0) = 1, el valor de k es el siguiente:

$$f(0)=e^0(0-k)=1 \Rightarrow \underline{k=-1}$$

La función resulta ser $f(x)=e^x(x+1)$ y su representación gráfica es la siguiente:

Se trata de una función continua en su dominio, que es R, por ser una función compuesta por el producto de dos funciones continuas en su dominio, que es R para cada una de las funciones producto: $g(x)=x+1\ \ y\ \ h(x)=e^x$.

Los puntos de corte con los ejes son:

Eje X: $y=f(x)=0 \Rightarrow (x+1)\cdot e^x=0\ ;;\ x=-1 \Rightarrow \underline{A(-1,\ 0)}$

Eje Y: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=(0+1)\cdot e^0=1\cdot 1=1 \Rightarrow \underline{B(0,\ 1)}$

Teniendo en cuenta lo anterior es $f'(x)=e^x(x+2)$ y $f''(x)=e^x(x+3)$.

El mínimo es para x = -2 y es $f(-2)=e^{-2}\cdot(-2+1)=-\frac{1}{e^2} \Rightarrow Mínimo:\ P\left(-2,\ -\frac{1}{e^2}\right)$.

La concavidad, convexidad y punto de inflexión son:

$$f''(x)=0 \Rightarrow e^x(x+3)=0\ ;;\ \underline{x=-3} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \rightarrow y''>0 \Rightarrow \underline{Concava:(-3,\infty)\ \ (\cap)} \\ \\ x<-3 \rightarrow y''<0 \Rightarrow \underline{Convexa:(-\infty,-3)\ \ (\cup)} \end{cases}$$

$$f'''(x)=e^x\cdot(x+4)\Rightarrow f'''(-3)=e^{-3}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P.\ I.\left(-3,-\frac{1}{e^3}\right)}}$$

$$f(-3)=(-3+2)\cdot e^{-3}=-\frac{1}{e^3}\rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\uparrow$$

Teniendo en cuenta que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\cdot e^x\right]=\infty\cdot\infty=\underline{\underline{\infty}}$.

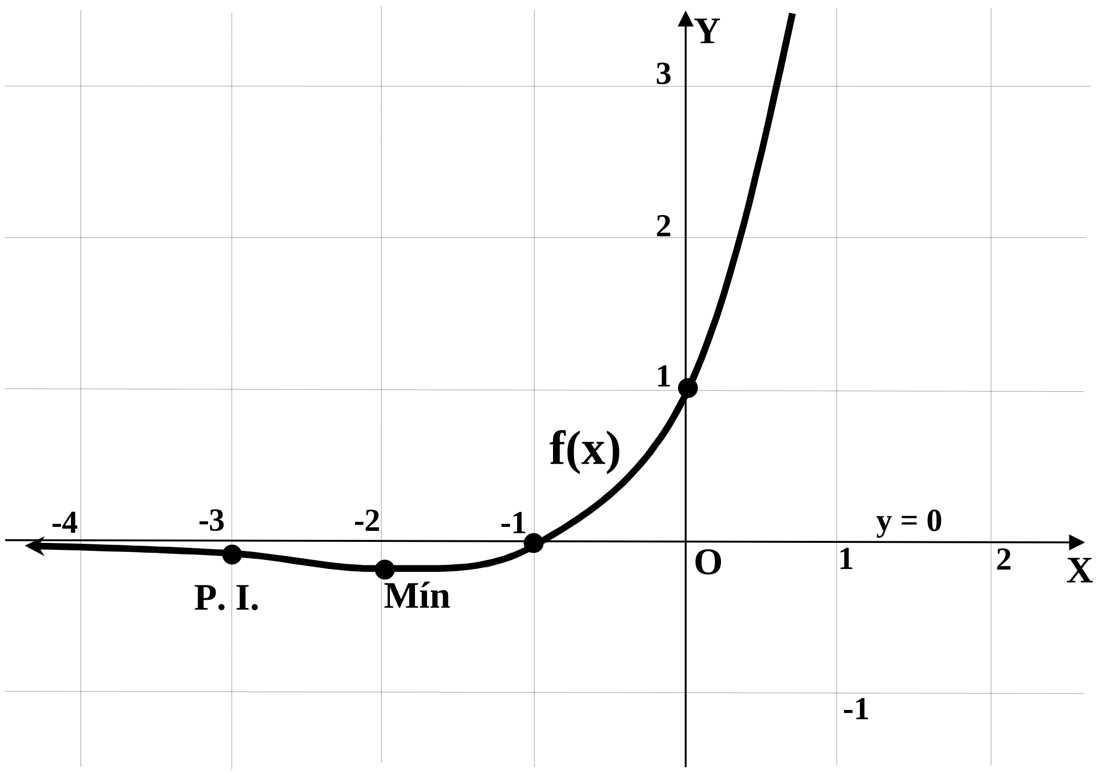
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)\cdot e^x\right]=-\infty\cdot e^{-\infty}=\frac{-\infty}{e^{\infty}}=-\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow In\det.\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ L'Hopital\ \Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=-\lim_{x\to-\infty}e^x=-e^{-\infty}=-\frac{1}{e^{\infty}}=\underline{\underline{0}}$$

Lo anterior significa que el eje de abscisas es asíntota en su parte negativa.

Para la representación gráfica formamos una tabla de valores que nos facilite su ejecución:

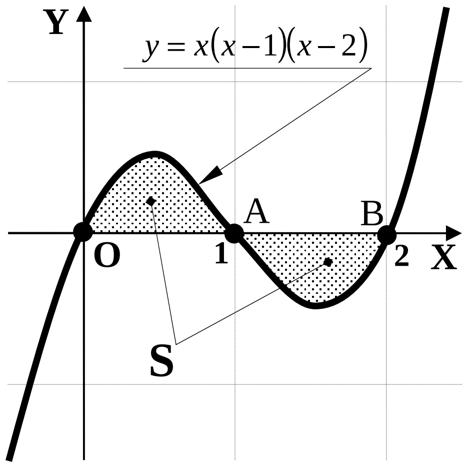
x	0	-2	-3	-1	1
y	1	$-\frac{1}{e^2}$	$-\frac{1}{e^3}$	0	2e
		Mín	P. I.		



****

4º) Calcula el área de la región limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y la recta y = 0. Haz un dibujo de la región.

Teniendo en cuenta que la curva es una función polinómica cuyos puntos de corte con el eje de abscisas son O(0, 0), A(1, 0) y B(2, 0) y que, por ejemplo, f(3) > 0, su representación gráfica aproximada es la que indica la siguiente figura.



De la observación de la figura y teniendo en cuenta que la superficie comprendida entre los límites de integración 1 y 2 tiene ordenadas negativas, el área pedida es:

$$S = \int_0^1 x(x-1)(x-2) \cdot dx + \int_2^1 x(x-1)(x-2) \cdot dx = \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \cdot dx + \int_2^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_0^1 + [F(x)]_2^1 = F(1) - F(0) + F(1) - F(2) = \underline{2F(1) - F(0) - F(2) = S} \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta que: $F(x) = \int \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$, sustituyendo en (*) resulta:

$$S = 2F(1) - F(0) - F(2) = 2 \cdot \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right] - 0 - \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2\right] = 2 \cdot \frac{1}{4} - 4 + 8 - 4 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\, u^2 = S}}$$

****